Appunti di Modelli matematici per le scelte di investimento

Teoria dell'utilità attesa ed applicazioni

1. Richiami

1.1. Funzioni di utilità

Le preferenze di un agente economico razionale possono essere rappresentate mediante le funzioni di utilità. Sia $U\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente con dominio un insieme qualsiasi D, contenente tutte le possibili scelte. Allora per ogni $d \in D$ il livello di soddisfazione ad esso associato è dato da $U(d)$. D'ora in poi si considera il caso $D \subseteq \mathbb{R}$. Si osservi che:

- la monotonia è una proprietà fondamentale, in quanto permette di tradurre la preferenza $\succ$ con $>$. In altre parole, ai panieri $A \succ B$ possiamo associare i numeri $a > b$, cosicché $U(a) > U(b)$;

- preferenze non transitive non ammettono alcuna rappresentazione, perché dati 3 panieri $A \succ B \succ C \succ A$, non è possibile trovare 3 numeri a, b, c tali che $U(a) > U(b) > U(c) > U(a)$.

Fissiamo le proprietà di U nella seguente defiizione.

Definizione 1.1. $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice funzione di utilità di un agente avverso al rischio se soddisfa la seguenti condizioni:*

1. *U è strettamente crescente, cioè*

$$U(x) > U(x') \qquad \forall x > x';$$

2. *U è strettamente concava, cioè*

$$U(\lambda x + (1-\lambda)x') > \lambda U(x) + (1-\lambda)U(x') \qquad \forall \lambda \in (0,1), x \neq x'.$$

Osservazione 1.1 (Legame tra concavità ed avversione al rischio)**.** *Come richiamato sopra, una funzione U è concava se*

$$U(\lambda x + (1-\lambda)x') > \lambda U(x) + (1-\lambda)U(x') \qquad \forall \lambda \in (0,1), x \neq x'.$$

A parole, il grafico di una funzione concava è sempre al di sopra della secante fra due punti del grafico (vedi figura 1).

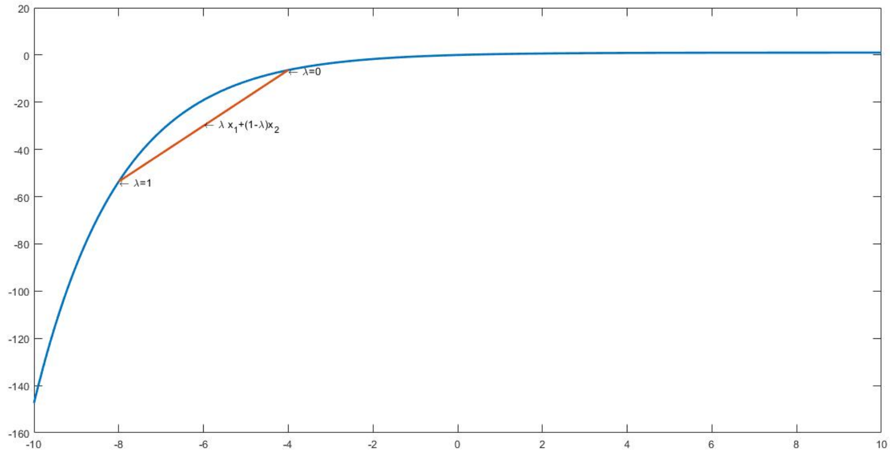

Figura 1: *Funzione concava. Nel grafico* $x_1 = -8$ *e* $x_2 = -4$.

Dato che $\lambda \in (0,1)$*, la quantità* $\lambda x + (1-\lambda)x'$ *è la media pesata di* x *e* x'*. Si può generalizzare questo discorso ad una variabile aleatoria* X*:*

$$U(\mathbb{E}[X]) > \mathbb{E}[U(X)] \qquad \textit{(disuguaglianza di Jensen)},$$

che è proprio la definizione di agente avverso al rischio (l'utilità di una quantità certa $\mathbb{E}[X]$ *è superiore al valore atteso dell'utilità di* X*). Dunque la definizione di avversione al rischio coincide con quella di funzione concava.*

Esempio 1.1. *Di seguito sono riportate alcune funzioni di utilità molto diffuse nelle applicazioni:*

- *quadratica:*

$$U(x) = x - \frac{x^2}{2\eta}, \qquad x \leq \eta, \eta > 0;$$

- *esponenziale:*

$$U(x) = 1 - e^{-\eta x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \eta > 0;$$

- *logaritmica:*

$$U(x) = \log(\eta + x), \qquad x > -\eta, \eta \in \mathbb{R};$$

- *potenza:*

$$U(x) = \frac{x^\eta}{\eta}, \qquad x > 0, \eta \in (0,1).$$

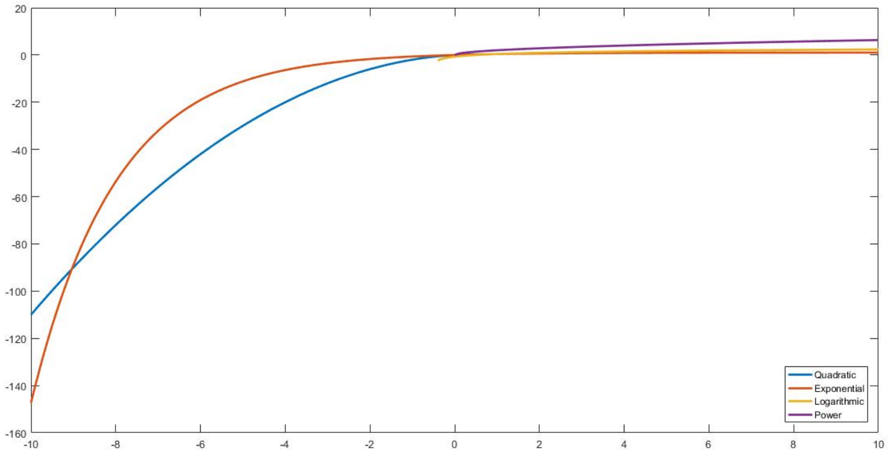

Figura 2: *Examples of utility functions ($\eta = \frac{1}{2}$).*

Una quantità di particolare interesse è la seguente:

$$-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \text{ARA function},$$

cioè l'avversione al rischio assoluta. Nel caso esponenziale, è facile verificare che $-\frac{U'(x)}{U''(x)} = \eta$, pertanto la funzione esponenziale appartiene alla classe delle funzioni CARA (*Constant Absoulute Risk Aversion*). Un'altra classe di rilievo è quella CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), in cui il rapporto $-\frac{U'(x)}{x\,U''(x)}$ è costante, come nel caso della funzione potenza.

Ultimamente (vedi (Chen et al., 2011)) è stata introdotta una nuova classe di funzioni di utilità detta SAHARA. Una funzione di utilità appartiene a questa classe se l'avversione al rischio assoluta ammette la seguente espressione:

$$-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{a}{\sqrt{b^2 + (x-d)^2}}\ ,$$

dove $b > 0$ è il parametro di scala, $a > 0$ il parametro di avversione al rischio e $d \in \mathbb{R}$ la ricchezza soglia. La caratteristica principale è che la funzione ARA non è monotona e le CARA e CRRA possono essere ottenute come casi limite.

1.2. Calcolo stocastico

Definizione 1.2. *Un processo stocastico continuo e adattato $\{W_t\}_{t>0}$ si dice moto Browniano standard se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $W_0 = 0 \quad \mathbb{P}$*-q.s.;*
2. *l'incremento $W_t - W_s$, con $0 \le s < t$, è indipendente da $\mathcal{F}_s$;*
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*, con $0 \le s < t$.*

Dalla proprietà 3 è facile vedere che $W_t - W_0 = W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.

Definizione 1.3. *Un processo stocastico adattato $\{M_t\}_{t>0}$ si dice martingala se*

- $\mathbb{E}[M_t] < \infty \quad \forall t > 0$*;*

- $M_s = \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \quad \forall s < t.$

Esercizio 1.1. *Dimostrare che un moto Browniano standard è una martingala.*

Teorema 1.1. *Sia X un processo di Itô soluzione della seguente SDE:*

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \qquad X_0 > 0,$$

dove $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ è un moto Browniano standard. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare e si definisca il processo $\{Y_t \doteq f(t, X_t)\}_{t\in[0,T]}$. Allora risulta che

$$\begin{aligned} df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \mu(t, X_t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\right) dt \\ + \sigma(t, X_t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dW_t. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nella notazione integrale, la (1.1) equivale a

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \mu(s, X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2}\sigma(s, X_s)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\right) ds \\ + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dW_s}_{\text{martingala}}. \end{aligned}$$

Il processo $M_t = \int_0^t \sigma(s, X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dW_s$ è una martingala a media nulla. Infatti, per ogni $r < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_r] &= \mathbb{E}\left[\int_0^r \sigma(s, X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dW_s \mid \mathcal{F}_r\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_r^t \sigma(s, X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dW_s \mid \mathcal{F}_r\right]}_{=0} \\ &= M_r. \end{aligned}$$

Il generatore del processo $\{Y_t \doteq f(t, X_t)\}_{t\in[0,T]}$ è definito come l'operatore $\mathcal{L}$ tale che si possa scrivere

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \mathcal{L}f(s, X_s)\, ds + M_t,$$

dove M_t è una martingala. Per quanto detto prima, risulta che

$$\mathcal{L}f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma(t, x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x).$$

2. Problemi di ottimizzazione dell'utilità attesa

2.1. Un primo esempio (monoperiodale)

In un modello ad un periodo, con due istanti di tempo $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, si consideri un titolo rischioso che vale S_0 e che evolve secondo la seguente distribuzione di probabilità:

$$S_1 = \begin{cases} S_u & \text{con prob. } p \\ S_d & \text{con prob. } 1 - p, \end{cases}$$

dove $S_d < S_0 < S_u$. Inoltre, sia r il tasso privo di rischio per il periodo considerato. Un investitore con ricchezza iniziale W_0 decide di investire una quantità α nel titolo S, mentre la restante parte $W_0 - \alpha$ sarà investita al tasso privo di rischio. Di conseguenza, al tempo 1 la ricchezza dell'investitore sarà

$$W_1 = W_0 + \alpha\frac{S_1 - S_0}{S_0} + (W_0 - \alpha)r.$$

Introducendo la notazione $\mu_u = \frac{S_u - S_0}{S_0}$, $\mu_d = \frac{S_d - S_0}{S_0}$, si può anche scrivere

$$W_1 = \begin{cases} W_0 + \alpha\mu_u + (W_0 - \alpha)r & \text{con prob. } p \\ W_0 + \alpha\mu_d + (W_0 - \alpha)r & \text{con prob. } 1 - p. \end{cases}$$

Consideriamo il problema di massimizzazione dell'utilità attesa:

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[U(W_1)].$$

Nel caso di utilità esponenziale, si avrà

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[1 - e^{-\eta W_1}] = -\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-\eta W_1} - 1] = 1 - \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-\eta W_1}]. \tag{2.1}$$

Per quanto detto sopra, si può scrivere esplicitamente quel valore atteso:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\eta W_1}] &= pe^{-\eta(W_0 + \alpha\mu_u + (W_0 - \alpha)r)} + (1 - p)e^{-\eta(W_0 + \alpha\mu_d + (W_0 - \alpha)r)} \\ &= e^{-\eta W_0(1+r)} \left[pe^{-\eta\alpha(\mu_u - r)} + (1 - p)e^{-\eta\alpha(\mu_d - r)} \right]. \end{aligned}$$

Si tratta di una funzione deterministica di α. La derivata prima del termine tra parentesi è

$$-\eta(\mu_u - r)pe^{-\eta\alpha(\mu_u - r)} - \eta(\mu_d - r)(1 - p)e^{-\eta\alpha(\mu_d - r)},$$

mentre la derivata seconda è

$$\eta^2(\mu_u - r)^2 pe^{-\eta\alpha(\mu_u - r)} + \eta^2(\mu_d - r)^2(1 - p)e^{-\eta\alpha(\mu_d - r)} > 0.$$

La funzione da minimizzare è continua e convessa in $\alpha \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, il punto di minimo esiste ed è unico. Inoltre, coincide con l'unico punto stazionario della funzione.

Esercizio 2.1. *Determinare la strategia ottima di investimento α^*.*

$$\alpha^* = \frac{1}{\eta(\mu_u - \mu_d)} \log\left(-\frac{\mu_u - r}{\mu_d - r} \frac{p}{1 - p} \right).$$

Esercizio 2.2. *Sia $p = \frac{1}{2}$. Sotto quali condizioni è ottimale vendere allo scoperto il titolo rischioso?*

$$r < \frac{\mu_u + \mu_d}{2} = \textit{rendimento medio}.$$

2.2. Problemi di controllo stocastico

Sia $T > 0$ l'orizzonte temporale fissato. Si introducono i seguenti oggetti:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità;
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$ filtrazione di riferimento;
- $\{W_t\}_{t \in [0,T]}$ moto Browniano standard.

Sia $\{X_t^\alpha\}_{t \in [0,T]}$ un processo di diffusione controllato che soddisfa la seguente equazione:

$$dX_t^\alpha = b(t, X_t^\alpha, \alpha_t)\, dt + \gamma(t, X_t^\alpha, \alpha_t)\, dW_t \qquad X_0^\alpha > 0, \tag{2.2}$$

dove $b(t, x, \alpha)$ e $\gamma(t, x, \alpha)$ sono due funzioni sufficientemente regolari e $\{\alpha_t\}_{t \in [0,T]}$ è un processo $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$-adattato a valori in $\mathbb{R}$ chiamato controllo. Nel seguito si denota con $\mathcal{A}$ la classe dei controlli ammissibili e con $\mathcal{A}_t$ la stessa classe ristretta all'intervallo $[t, T]$.

Un problema di controllo stocastico con orizzonte temporale finito è il seguente:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[g(X_T^\alpha)],$$

per qualche funzione g. Si definisce la funzione guadagno associata al problema:

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}[g(X_{t,x}^\alpha(T))], \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \alpha \in \mathcal{A}_t,$$

dove $X_{t,x}^\alpha(T)$ indica il processo X con dato iniziale (t,x) valutato al tempo T. Al problema sopra viene associata la seguente funzione valore:

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} J(t,x,\alpha) \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Definizione 2.1. *Un controllo ammissibile $\hat{\alpha}$ si dice controllo ottimo se $J(t,x,\hat{\alpha}) = v(t,x)$.*

Definizione 2.2. *Un controllo α si dice Markoviano se esiste una funzione $\alpha(t,x)\colon [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\alpha_t = \alpha(t, X_t^\alpha)$.*

Esempio 2.1 (Investimento ottimo)**.** *Si consideri una funzione di utilità U che descrive le preferenze di un investitore con ricchezza iniziale X_0. Sia $S = \{S_t\}_{t\in[0,T]}$ un titolo rischioso descritto dalla seguente SDE:*

$$dS_t = S_t\big(\mu\, dt + \sigma\, dW_t\big), \qquad S_0 > 0,$$

e sia $r > 0$ il tasso privo di rischio. L'investitore può allocare una porzione $\alpha \in A$ nel titolo rischioso, cosicché la restante parte $1-\alpha$ sarà investita al tasso privo di rischio. Qui $A \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme chiuso e convesso (ad esempio, $A = [0,1]$). La ricchezza X_t evolve secondo la seguente dinamica:

$$\begin{aligned} dX_t^\alpha &= X_t^\alpha \alpha_t \frac{dS_t}{S_t} + X_t^\alpha (1-\alpha_t) r\, dt \\ &= X_t^\alpha \Big[\alpha_t\big(\mu\, dt + \sigma\, dW_t\big) + (1-\alpha_t) r\, dt\Big] \\ &= X_t^\alpha \Big[\big(\alpha_t \mu + (1-\alpha_t) r\big)\, dt + \alpha_t \sigma\, dW_t\Big], \qquad X_0^\alpha > 0. \end{aligned}$$

Si osservi che una soluzione X_t esiste ed è unica se

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \alpha_s^2\, ds\right] < \infty, \tag{2.4}$$

pertanto si dovrà richiedere questa proprietà come condizione di ammissibilità.

Il problema di investimento ottimo è quello di determinare una strategia α tale che si massimizzi l'utiltà attesa della ricchezza al tempo finale T:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T^\alpha)],$$

dove $\mathcal{A}$ è la classe dei controlli a valori in A tali che la (2.4) sia soddisfatta.

Nell'articolo di Merton (1969), in particolare, si considera una funzione di utilità CRRA del tipo

$$U(x) = \frac{x^\eta}{\eta} \qquad x \geq 0, \eta \in (0,1),$$

pertanto il problema è formulato come

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\frac{(X_T^\alpha)^\eta}{\eta}\right].$$

Si noti che X_t è un processo di diffusione di tipo geometrico, quindi la funzione di utilità è ben definita.

Esercizio 2.3. *Scrivere la funzione valore associata al problema di investimento ottimo illustrato sopra. Dimostrare che è monotona crescente in x.*

2.3. Approccio HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman)

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione della funzione valore (2.3).

Teorema 2.1 (Teorema di verifica)**.** *Si assuma la seguente condizione di integrabilità:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \gamma(s, X^\alpha_{t,x}(s), \alpha_s)^2\, ds\right] < \infty.$$

Sia $v(t,x)$ una funzione sufficientemente regolare soluzione della seguente PDE:

$$\begin{cases} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathcal{L}^\alpha v(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \\ v(T,x) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.5}$$

dove $\mathcal{L}^\alpha$ è il generatore del processo X dato dalla seguente espressione:

$$\mathcal{L}^\alpha f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + b(t,x,\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\gamma(t,x,\alpha)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x), \tag{2.6}$$

per tutte le funzioni f sufficientemente regolari.

Sia, inoltre, $\alpha^*(t,x)$ tale da realizzare il sup nell'HJB, cioè

$$\mathcal{L}^{\alpha^*(t,x}v(t,x) = \sup_{\alpha\in A} \mathcal{L}^\alpha v(t,x) = 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}.$$

Allora $v(t,x)$ è la funzione valore (2.3) *e $\alpha^*(s, X^\alpha_{t,x}(s))$, $s \in [t,T]$, è un controllo ottimo.*

Dimostrazione. Si consideri il processo $v(s, X^\alpha_{t,x}(s))$, $s \in [t,T]$. Essendo v una funzione regolare e conoscendo la dinamica di X (vedi Eq. (2.2)), si può applicare la formula di Itô:

$$v(T, X^\alpha_{t,x}(T)) = v(t,x) + \int_t^T \mathcal{L}^\alpha v(s, X^\alpha_{t,x}(s)) + M_T - M_t,$$

dove

$$M_s = \int_t^s \gamma(r, X^\alpha_{t,x}(r), \alpha_r)\, dW_r \qquad s \in [t,T]$$

è una martingala grazie alle ipotesi del teorema. Sfruttando l'equazione HJB, si ottiene che

$$\begin{aligned} g(X^\alpha_{t,x}(T)) &= v(t,x) + \int_t^T \mathcal{L}^\alpha v(s, X^\alpha_{t,x}(s)) + M_T - M_t \\ &\le v(t,x) + M_T - M_t. \end{aligned}$$

Prendendo il valore atteso di ambo i membri della disuguaglianza, si ha che

$$\mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))] \le v(t,x) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

perché le martingale sono a media nulla. Dunque

$$v(t,x) \ge \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))] \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

Ora, sia $\alpha^*(t,x)$ tale da realizzare il sup nell'HJB. Ripetendo i passaggi sopra, si mostra che

$$v(t,x) = \mathbb{E}[g(X^{\alpha^*}_{t,x}(T))] \le \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))].$$

Di conseguenza,

$$v(t,x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))]$$

e $\alpha^*(s, X^\alpha_{t,x}(s))$, $s \in [t,T]$, è un controllo ottimo. □

2.4. Problema di investimento ottimo (Merton)

Sia $S = \{S_t\}_{t\in[0,T]}$ un titolo rischioso:

$$dS_t = S_t\big(\mu\, dt + \sigma\, dW_t\big), \qquad S_0 > 0,$$

e sia $r > 0$ il tasso privo di rischio. Si richiama anche la dinamica della ricchezza:

$$dX_t^\alpha = X_t^\alpha\Big[\big(\alpha_t\mu + (1-\alpha_t)r\big)\, dt + \alpha_t\sigma\, dW_t\Big], \qquad X_0^\alpha > 0.$$

Il problema dell'investitore è stato formalizzato come segue:

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T^\alpha)], \tag{2.7}$$

dove $\mathcal{A}$ è la classe dei controlli a valori in $A \subset \mathbb{R}$ (sottoinsieme compatto) tali che la (2.4) sia soddisfatta. In particolare, si tratterà il caso

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\frac{(X_T^\alpha)^\eta}{\eta}\right],$$

dove $\eta \in (0,1)$.

L'equazione HJB associata al problema è la seguente

$$\begin{cases} \sup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{L}^\alpha v(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \\ v(T,x) = U(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.8}$$

con

$$\mathcal{L}^\alpha f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + x\big(\alpha\mu + (1-\alpha)r\big)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x).$$

Si vuole cercare una soluzione della forma

$$v(t,x) = \phi(t)U(x),$$

per qualche funzione positiva $\phi\colon [0,T] \to (0,+\infty)$. Imponendo che una funzione del genere soddisfi l'HJB, si ottiene che

$$\sup_{\alpha\in A} \{\phi'(t)U(x) + x\big(\alpha\mu + (1-\alpha)r\big)\phi(t)U'(x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\alpha^2\phi(t)U''(x)\} = 0,$$

con condizione finale $\phi(T)U(x) = U(x) \Leftrightarrow \phi(T) = 1$. Dall'espressione di U, la PDE si può riscrivere come

$$\begin{aligned} &\sup_{\alpha\in A} \{\phi'(t)\frac{x^\eta}{\eta} + \phi(t)\big[x\big(\alpha(\mu-r)+r\big)x^{\eta-1} + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\alpha^2(\eta-1)x^{\eta-2}\big]\} \\ &\qquad\qquad = x^\eta \sup_{\alpha\in A} \{\frac{1}{\eta}\phi'(t) + \phi(t)\big[\big(\alpha(\mu-r)+r\big) + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2(\eta-1)\big]\} = 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza, affinché v soddisfi l'HJB, è necessario che ϕ soddisfi la seguente ODE:

$$\phi'(t) + \eta\sup_{\alpha\in A}\big[\alpha(\mu-r) + r + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2(\eta-1)\big]\phi(t) = 0, \qquad \phi(T) = 1.$$

Si tratta di una ODE del tipo

$$\phi'(t) + \Gamma\phi(t) = 0, \qquad \phi(T) = 1,$$

dove $\Gamma = \eta\sup_{\alpha\in A}\big[\alpha(\mu-r) + r + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2(\eta-1)\big]$.

Esercizio 2.4. *Verificare che $\phi(t) = e^{\Gamma(T-t)}$ soddisfa la ODE sopra.*

Dai ragionamenti sopra, si ottiene anche un suggerimento per determinare la strategia ottima. Infatti, il prolema di massimizzazione è

$$\sup_{\alpha\in A}\big[\alpha(\mu-r)+r-\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2(1-\eta)\big].$$

La funzione da massimizzare è una parabola concava, pertanto nel caso $A = \mathbb{R}$ il punto di massimo coincide con l'unico punto stazionario, che è

$$\alpha^* = \frac{\mu-r}{\sigma^2(1-\eta)}.$$

Data questa espressione esplicita, si può verificare facilmente che

$$\begin{aligned}\Gamma &= \eta\big[\alpha^*(\mu-r)+r-\frac{1}{2}\sigma^2(\alpha^*)^2(1-\eta)\big]\\ &= \eta\left[\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2(1-\eta)}+r-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^4(1-\eta)^2}(1-\eta)\right]\\ &= \frac{\eta}{1-\eta}\left(\frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)+\eta r.\end{aligned}$$

Esercizio 2.5. *Siano $a < b$ due costanti reali. Quale è la strategia ottima per $A = [a, b]$?*

Esercizio 2.6. *Per quali investitori non è mai ottimale vendere allo scoperto il titolo rischioso?*

Esercizio 2.7. *La strategia trovata è ammissibile?*

Teorema 2.2. *Sia $v(t, x) = \phi(t)U(x)$, con $U(x) = \frac{x^\eta}{\eta}$ e $\phi(t) = e^{\Gamma(T-t)}$, dove*

$$\Gamma = \frac{\eta}{1-\eta}\left(\frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right)+\eta r.$$

Si definisca, inoltre, il processo $\{\alpha^*_t = \frac{\mu-r}{\sigma^2(1-\eta)}\}_{t\in[0,T]}$. Allora v è la funzione valore associata al problema di investimento ottimo di Merton, cioè

$$v(t,x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[\frac{(X^\alpha_{t,x}(T))^\eta}{\eta}\right], \qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$$

e $\{\alpha^*_t\}_{t\in[0,T]}$ è un controllo ottimo.

Dimostrazione. Si è dimostrato in precedenza che la funzione ϕ definita come sopra soddisfa la seguente ODE:

$$\phi'(t)+\eta\sup_{\alpha\in A}\big[\alpha(\mu-r)+r+\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2(\eta-1)\big]\phi(t) = 0, \qquad \phi(T) = 1.$$

Con un po' di calcoli, è facile mostrare che, di conseguenza, la funzione $v(t, x) = \phi(t)U(x)$ soddisfa l'equazione HJB (2.8).

Adesso si consideri il processo $v(s, X^\alpha_{t,x}(s))$, $s \in [t, T]$ per una arbitraria strategia ammissibile. Essendo v una funzione regolare (grazie alle proprietà dell'esponenziale e della funzione di utilità), si può applicare la formula di Itô:

$$v(T, X^\alpha_{t,x}(T)) = v(t,x)+\int_t^T \mathcal{L}^\alpha v(s, X^\alpha_{t,x}(s))+M_T-M_t,$$

dove

$$M_s = \int_t^s x\sigma\alpha_r\,dW_r, \qquad s\in[t,T]$$

è una martingala per ogni controllo ammissibile. Sfruttando l'equazione HJB, si ottiene che

$$\begin{aligned} g(X^\alpha_{t,x}(T)) &= v(t,x) + \int_t^T \mathcal{L}^\alpha v(s, X^\alpha_{t,x}(s)) + M_T - M_t \\ &\leq v(t,x) + M_T - M_t. \end{aligned}$$

Prendendo il valore atteso di ambo i membri della disuguaglianza, si ha che

$$\mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))] \leq v(t,x) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

perché le martingale sono a media nulla. Dunque

$$v(t,x) \geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))] \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

Ora, sia $\{\alpha^*_t = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\eta)}\}_{t \in [0,T]}$. Questo è tale da realizzare il sup nell'HJB. Ripetendo i passaggi sopra, si mostra che

$$v(t,x) = \mathbb{E}[g(X^{\alpha^*}_{t,x}(T))] \leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))].$$

Di conseguenza,

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}[g(X^\alpha_{t,x}(T))]$$

e $\{\alpha^*_s\}_{s \in [t,T]}$ è un controllo ottimo. □

2.5. Investimento ottimo con utilità esponenziale

Si consideri nuovamente il problema di investimento ottimo della sezione precedente. Nel caso di funzione di utilità esponenziale di parametro $\eta > 0$ l'equazione (2.7) si traduce nella seguente:

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[e^{-\eta X^\alpha_T} \right].$$

(Si passa dal problema di massimizzazione a quello di minimizzazione come già visto nell'equazione (2.1). L'equazione HJB è ancora la (2.8) e si vuole utilizzare l'ansatz $v(t,x) = \phi(t)e^{-\eta x}$. In questo caso si ottiene

$$\inf_{\alpha \in A} \{\phi'(t)e^{-\eta x} - x\big(\alpha\mu + (1-\alpha)r\big)\phi(t)\eta e^{-\eta x} + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\alpha^2\phi(t)\eta^2 e^{-\eta x}\} = 0,$$

con $\phi(T) = 1$. Dividendo per $e^{-\eta x}$ ed eseguendo qualche calcolo l'equazione diventa

$$\inf_{\alpha \in A} \{\phi'(t) + \Big[\underbrace{\frac{1}{2}x^2\sigma^2\eta^2}_{>0}\alpha^2 - \eta x\big((\mu - r)\alpha + r\big)\Big]\phi(t)\} = 0,$$

Dunque il problema di minimizzazione da risolvere è il seguente:

$$\min_{\alpha \in A} \{\frac{1}{2}x^2\sigma^2\eta^2\alpha^2 - \eta x\big((\mu - r)\alpha + r\big)\}.$$

Si verifica facilmente che la soluzione esiste ed è unica. Inoltre, per $A = \mathbb{R}$ essa ammette la seguente espressione:

$$\alpha^* = \frac{\mu - r}{\eta\sigma^2 x}.$$

2.6. Problemi con guadagno/costo corrente

Non tutti i problemi possono essere formulati come nella sezione precedente, cioè del tipo

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[g(X_T^\alpha)].$$

Esempio 2.2 (Problema di consumo-investimento)**.** *Sia S un titolo rischioso con una dinamica alla Black-Scholes. Un investitore può adottare una strategia $u = (\alpha, c) \in A \times [0, +\infty)$ in cui*

- *α = porzione di ricchezza investita nel titolo rischioso;*
- *c = consumo per unità di ricchezza.*

Si considerano ammissiibili tutti i controlli $u = (\alpha, c)$ a valori in $A \times [0, +\infty)$ tali che

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha_t^2 + c_t)\, dt\right] < \infty.$$

Il processo ricchezza segue la dinamica qui sotto:

$$dX_t^u = X_t^u \Big[\big(\alpha_t \mu + (1 - \alpha_t) r - c_t\big)\, dt + \alpha_t \sigma\, dW_t\Big] \qquad X_0^u > 0.$$

L'obiettivo dell'investitore è quello di massimizzare l'utilità del consumo intertemporale:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\gamma t} U(c_t X_t^u)\, dt + B(T, X_T^u)\right],$$

dove $\gamma > 0$ è un fattore di sconto (tasso di interesse, preferenze tra consumare oggi o domani) e la funzione $B\colon [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rappresenta il valore associato alla ricchezza residua al tempo T (in inglese bequest valuation function oppure scrap function per i modelli di produzione).

Questo esempio motiva lo studio di un problema di controllo stocastico di questo tipo:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X_t^u, u_t)\, dt + g(T, X_T^u)\right],$$

dove u è un controllo a valori in U (nell'esempio di sopra $U = A \times [0, +\infty)$, con $A \subset \mathbb{R}$) e $f\colon \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ è una funzione detta guadagno/costo corrente. In questo caso la funzione profitto dovrebbe essere definita in questo modo:

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_{t,x}^u(s), u_s)\, ds + g(T, X_{t,x}^u(T))\right] \qquad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, u \in \mathcal{U}.$$

La funzione valore è

$$v(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_t} J(t, x, u) \qquad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

La classe dei controlli ammissibili è l'insieme dei processi tali che

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \big|f(s, X_{t,x}^u(s), u_s)\big|\, ds\right] < \infty.$$

A questo punto occorre estendere il teorema di verifica.

Teorema 2.3 (Teorema di verifica)**.** *Si assuma la seguente condizione di integrabilità:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \gamma(s, X_s^u, u_s)^2\, ds\right] < \infty.$$

Sia $v(t,x)$ una funzione sufficientemente regolare soluzione della seguente PDE:

$$\begin{cases} \sup_{u\in U} \mathcal{L}^u v(t,x) + f(t,x,u) = 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times U \\ v(T,x) = g(T,x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.10}$$

dove $\mathcal{L}^u$ è il generatore del processo X dato dalla seguente espressione:

$$\mathcal{L}^u w(t,x) = \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + b(t,x,\alpha)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\gamma(t,x,\alpha)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x),$$

con w sufficientemente regolare. Sia, inoltre, $u^*(t,x)$ tale da realizzare il sup nell'HJB, cioè

$$\mathcal{L}^{u^*(t,x)} v(t,x) = \sup_{u\in U} \mathcal{L}^u v(t,x) = 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}.$$

Allora $v(t,x)$ è la funzione valore e $u^*(s, X^u_{t,x}(s))$, $s \in [t,T]$, è un controllo ottimo.

Dimostrazione. Si consideri il processo $v(s, X^u_{t,x}(s))$, $s \in [t,T]$. Essendo v una funzione regolare e conoscendo la dinamica di X, possiamo applicare la formula di Itô:

$$v(T, X^u_{t,x}(T)) = v(t,x) + \int_t^T \mathcal{L}^u v(s, X^u_{t,x}(s)) + M_T - M_t,$$

dove

$$M_s = \int_t^s \gamma(r, X^u_{t,x}(r), u_r)\, dW_r \qquad s \in [t,T]$$

è una martingala grazie alle ipotesi del teorema. Sfruttando l'equazione HJB (2.7), si ottiene che

$$\begin{aligned} g(T, X^u_{t,x}(T)) &= v(t,x) + \int_t^T \mathcal{L}^u v(s, X^u_{t,x}(s)) + M_T - M_t \\ &\leq v(t,x) - \int_t^T f(s, X^u_{t,x}(s), u_s)\, ds + M_T - M_t. \end{aligned}$$

Prendendo il valore atteso di ambo i membri della disuguaglianza e riordinandoli, si ha che

$$\mathbb{E}[g(T, X^u_{t,x}(T)) + \int_t^T f(s, X^u_{t,x}(s), u_s)\, ds] \leq v(t,x) \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, u \in U,$$

perché le martingale sono a media nulla. Dunque

$$v(t,x) \geq \sup_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[g(T, X^u_{t,x}(T)) + \int_t^T f(s, X^u_{t,x}(s), u_s)\, ds \right].$$

Ora, sia $u^*(t,x)$ tale da realizzare il sup nell'HJB. Ripetendo i passaggi sopra, si mostra che

$$v(t,x) = \mathbb{E}\left[g(T, X^{u^*}_{t,x}(T)) + \int_t^T f(s, X^{u^*}_{t,x}(s), u^*_s)\, ds \right] \leq \sup_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[g(T, X^u_{t,x}(T)) + \int_t^T f(s, X^u_{t,x}(s), u_s)\, ds \right].$$

Di conseguenza, deve valere l'uguaglianza

$$v(t,x) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[g(T, X^u_{t,x}(T)) + \int_t^T f(s, X^u_{t,x}(s), u_s)\, ds \right]$$

e $u^*(s, X^\alpha_{t,x}(s))$, $s \in [t,T]$, è un controllo ottimo. □

2.7. Problema di investimento-consumo

Il processo ricchezza segue la dinamica descritta nell'esempio precedente:

$$dX_t^u = X_t^u \Big[\big(\alpha_t \mu + (1-\alpha_t) r - c_t\big)\, dt + \alpha_t \sigma \, dW_t \Big] \qquad X_0^u > 0,$$

mentre il problema di ottimizzazione è

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \Big[\int_0^T e^{-\gamma t} U(c_t X_t^u)\, dt + B(T, X_T^u) \Big].$$

Si ricordi che $u = (\alpha, c) \in A \times [0, +\infty)$. Seguendo la formulazione originaria di Merton, da ora in poi si assume

$$B(t,x) = e^{1-\eta} e^{-\gamma t} \frac{x^\eta}{\eta}.$$

Secondo la notazione utilizzata nel Teorema di verifica, in questo caso si ha

$$f(t,x,c) = e^{-\gamma t} U(cx), \qquad g(t,x) = B(t,x).$$

L'equazione HJB associata al problema è la seguente:

$$\begin{cases} \sup\limits_{u \in U} \mathcal{L}^u v(t,x) + e^{-\gamma t} U(cx) = 0 & \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times U \\ v(T,x) = B(T,x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $\mathcal{L}^u$ dato da

$$\mathcal{L}^u w(t,x) = \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + x\big(\alpha\mu + (1-\alpha)r - c\big) \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2} x^2 \alpha^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x),$$

per ogni w sufficientemente regolare. Nel caso della funzione di utilità potenza, si consideri il seguente ansatz:

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \phi(t) e^{-\gamma t} U(x) \\ &= \phi(t) e^{-\gamma t} \frac{x^\eta}{\eta}, \end{aligned}$$

per qualche funzione positiva $\phi\colon [0,T] \to (0, +\infty)$.

Sostituendo questa funzione nell'HJB e dividendo per $e^{-\gamma t}$, si ottiene

$$\sup_{u \in U} \{ \phi'(t) U(x) - \gamma \phi(t) U(x) + x\big(\alpha\mu + (1-\alpha)r - c\big)\phi(t) U'(x) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \alpha^2 \phi(t) U''(x) + U(cx) \} = 0,$$

con $\phi(T) e^{-\gamma T} \frac{x^\eta}{\eta} = B(T,x)$. La PDE si può riscrivere come

$$\begin{aligned} &\sup_{u \in U} \{ \phi'(t) \frac{x^\eta}{\eta} - \gamma \phi(t) \frac{x^\eta}{\eta} + \phi(t) \big[x\big(\alpha(\mu - r) + r - c\big) x^{\eta-1} + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \alpha^2 (\eta - 1) x^{\eta-2} \big] + \frac{c^\eta x^\eta}{\eta} \} \\ &= x^\eta \sup_{\alpha \in A} \{ \frac{1}{\eta} \phi'(t) + \phi(t) \big[\big(\alpha(\mu - r) + r - \frac{\gamma}{\eta} + \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 (\eta - 1)\big] \} + \sup_{c \in [0,+\infty)} \{ \frac{c^\eta}{\eta} - \phi(t) c \} = 0. \end{aligned}$$

La massimizzazione rispetto a c ammette una ed una sola soluzione (deriva direttamente dalla definizione di funzione di utilità), pertanto indicando con $c^*(t)$ tale soluzione si ottiene facilmente che

$$c^*(t) = \phi(t)^{\frac{1}{\eta - 1}}.$$

Si osservi che finché non si esplicita $\phi(t)$ questa non è una formula esplicita e, in ogni caso, $c^*(t)$ dipende soltanto dal tempo t. Sostituendo, si ricava che

$$\sup_{c \in [0,+\infty)} \{ \frac{c^\eta}{\eta} - \phi(t) c \} = \phi(t)^{\frac{\eta}{\eta-1}} \big(\frac{1 - \eta}{\eta} \big).$$

Analogamente al modello senza consumo, si indichi con Γ la quantità

$$\Gamma \doteq \eta \sup_{\alpha \in A} \{\big(\alpha(\mu - r) + r - \frac{\gamma}{\eta} + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2(\eta - 1)\}.$$

La strategia ottima di investimento è chiaramente la stessa del caso senza consumo, perché la costante non influisce sul punto di massimo. Ora la PDE può essere riscritta come

$$x^\eta \left(\phi'(t) + \Gamma\phi(t) + \big(1 - \eta\big)\phi(t)^{\frac{\eta}{\eta-1}}\right) = 0.$$

Dunque la funzione ϕ deve soddisfare la seguente ODE:

$$\phi'(t) + \Gamma\phi(t) + \big(1 - \eta\big)\phi(t)^{\frac{\eta}{\eta-1}} = 0, \qquad \phi(T) = e^{1-\eta},$$

dove la condizione finale si ricava imponendo $v(T, x) = \phi(T)e^{-\gamma T}\frac{x^\eta}{\eta} = B(T, x)$. Si tratta di una ODE più complicata del caso senza consumo, perché appare un ulteriore termine. La soluzione ha una forma più elaborata (si veda l'articolo di Merton).

Esercizio 2.8. *Scrivere l'enunciato del teorema di verifica relativo al problema appena trattato.*